線型計画法

酒井彦四郎

一、線型計画法に関する簡単な一つの実例

Stigler 氏（1945年）(1)における如く、問題の経済的方面の中の栄養の問題を考察してみよう。一人の消費者が一連の食物、すなわち、パン、肉、ミルク等、を購入する。彼の購入を決定することに於て、例えば市場の与えられた価格と彼の所得、彼の種々の食物に対する「選好」"preferences"が、通常の消費者の振舞の理論に於ける如く、勘定に入れられる。これらの「選好」"preferences"とはどんな事であるか。一部分、それらは食物における彼の好みと消費における彼の習慣（及び彼の近隣地の人々の習慣）である。しかし、一部分、それらはやはり恐らくカロリー、たん白質、ビタミン等による彼の栄養の必要の一つの表現であるであろう。

ここで栄養的方面だけ考究する、それだから、その消費者は彼がその好みが好きであるために又は Jones 家の人々がバタを購入するために恐らくマーガリンよりもむしろ（例えば）バタを購入するであろうという事実には少しも関係がない。問題は変形 *transformation* の一つである、すなわち、市場価格で購入された食物は栄養分の摂取量に変形される。問題に対して二つの面がある、すなわち、消費者の食物はカロリーの総含有量、たん白質のグラ

(1) Stigler (G.J.) The Cost of Substance", *Journal Farm Economics*, 27,303—14.

ム、等については明確に記されている、そしてその上与えられた栄養の含有量を達成する代価をできるだけ少くするように与えられた市場価格で購入される。問題の与えられた技術上の資料は各食物の一単位中の栄養分の内訳から成り、そしてこれがここに一組の定数係数であると仮定された変形函数である。与えられた資料を用いて、標準食物は種々様々な量に食物を購入する事によりあらゆる種類の方法で達成することができる。問題の**もつともらしい解答** *feasible solution* はいくらでもこういう一そろいの購入である。問題はその時解かれ、そしてもしも最小費用に対する一そろいの購入が発見されるならば、一つの**最適でもつともらしい解答** *optimum feasible solution* が得られる。

一つの簡単な実例には、おのおのがカロリーとたん白質のグラムで測られた二つの栄養分を含んでいる二つの食べ物、X_1（パン）とX_2（チーズ）がある。与えられた資料は左記のものから成る。食べ物の栄養になる内容物はパンが1ポンドにつき1,000カロリーとたん白質の25グラム、チーズが1ポンドにつき2,000カロリーとたん白質の100グラムである。獲得される（少なくとも）標準食物は一日につき3,000カロリーとたん白質の100グラムである。市場価格はパンが1ポンドにつき6ペニー、チーズが1ポンドにつき1シリング9ペニーである。便宜な単位（1,000カロリー、たん白質が25グラム、パン又はチーズが1ポンド）で、資料が表にすることができる、すなわち、

	の1単位		必要とするもの
	X_1	X_2	
価格（単位につきペニー）	6	21	
カロリー（1,000）	1	2	3
たん白質（25グラム）	1	4	4

問題の陳述はそれでは次の通りである。すなわち、

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \geqq 3 \\ x_1 + 4x_2 \geqq 4 \\ x_1 \geqq 0 \quad x_2 \geqq 0 \\ \text{を条件として} \quad z = 6x_1 + 21x_2 = \text{最小量} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

のような、1日につき購入、 x_1 及び x_2 を見つけ出すこと。

最小にされる費用（1日につきペニー）は 変数 x_1 と x_2 の1次函数 z である。つけたりの関係は与えられた食物が少なくとも達せられねばならぬ要件を表わしている不等式である。変数の負でない値だけが許される。

これが線型計画法における一つの問題である。負でない変数の1次函数が1次不等式を条件としてできるだけ少くされるべきである。不等式のために、拘束された極小の微分積分学でない方法によって研究されるべきである。実際、その微分積分学はたとえ（1）のつけたりの関係が方程式

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 3 \qquad x_1 + 4x_2 = 4 \\ \text{を条件として} \quad z = 6x_1 + 21x_2 = \text{最小量} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

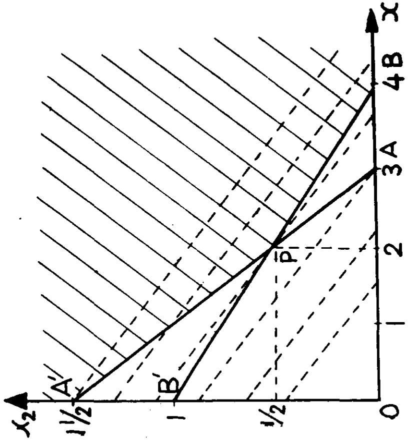
のように書かれているとしても役に立たない。 困難は (2) が多量を含み過ぎるということである、何となれば3条件の中のどの2つでも「解答」 “solution” をあてがうからである。 例えば、 z の最小量は一つのつけたりの関係 $x_1 + 2x_2 = 3$ を条件として見つけ出すことができる。 $x_1 = 3 - 2x_2$ を代りに入れると

$$z = 6x_1 + 21x_2 = 18 + 9x_2$$

これは $x_2 = 0$ それ故 $x_1 = 3$ のとき最小量（負でない x_2 に対して）となる。故に、パンの3ポンド買うこととチ

ーズを決して買わないことが1日につき18ペニーの最小の費用を与える。この「解答」"solution" は 3,000 カロリー（用いられたつけたりの関係）のカロリー要件を達成しているが、容易に検査することができるように（75グラムだけ得られる）、100 グラムのたん白質要件を達成していない。また一方では、二つのつけたりの関係みずから「解答」"solution" を与える。$x_1+2x_2=3$ 及び $x_1+4x_2=4$ から $x_1=2$ 及び $x_2=\frac{1}{2}$ が得られる。この「解答」"solution" は双方の栄養の要件を達成しているが、それはその食物の費用を全然無視している。

線型計画（1）の図式使用の解法はこの簡単な場合に実行可能である。第1図の平面 $O\,x_1\,x_2$ の中で、AA' は直線 $x_1+2x_2=3$ であり又 BB' は直線 $x_1+4x_2=4$ である。（1）の不等式はもっともらしい解は第1図の陰がついている区域の中の点（x_1, x_2）であると示している。それは最低費用を有する陰のついている区域の点を選ばねばならぬ。



第　1　図

第1図で破線で示された、一定の費用直線

$$6x_1+21x_2=\text{一定}\ (z)$$

これ等は 平行線（Ox_1 に対して 勾配 $-\frac{2}{7}$）であり かつ その費用はその直線が O により近づいている時減少する。

故に最小費用は AA' と BB' が相交わるところの P で起る。解（最適のもっともらしい）は

$$x_1=2 \quad x_2=\frac{1}{2} \qquad z=22\frac{1}{2} \quad \text{（最小量）}$$

である。もしもパンが2ポンド及びチーズが $\frac{1}{2}$ ポンドが 毎日購入されるならば、 栄養になる要件が合致させられ かつその費用

は1日につき$22\frac{1}{2}$ペニーで最小量となる。

この場合には解はちょうど栄養分の要件に適ししかも食物は2つとも買われるという事はある。この一致は一定の費用直線の勾配は AA' と BB' の勾配の中間であるという事実如何で定まる。価格が変化させられるなら、あるいは二つの食物の栄養分の含有量が異なっているなら、一定の費用直線は勾配に関してはあるいは最早 AA' と BB' との間には存在しないであろう。

その解答は第1図におけるBで（例えばチーズが価が高ければ）か又はA'で（例えばパンが価が高ければ）かで恐らく現われかつ一つの要件は満足させられ得るどころかそれ以上であり得ることが明らかである。同様に無数の解答が存在する場合があるようである。

価格と栄養分の含有量は多分一定の費用直線が AA' に（又は BB' に）平行であるような物であるであろう、そしてこの場合に $A'P$ 上の（又は PB 上の）どんな点でも解答を与える。一般的結論は

（i） もっともらしい解答は（第1図で陰をつけられた）範囲に起る。

（ii） 問題を解くに要求されるような、最適のもっともらしい解答は、範囲の境界（第1図の $A'PB$ ）上のどこか一点で（又は無数の点で）起る。

ということである。

これが線型計画法のすべての問題の中に捜し求められる解答の種類である。

二、簡単な実例—双対問題

一、の栄養問題は最小のそれである。それは

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \geqq 3 \\ x_1 + 4x_2 \geqq 4 \\ x_1 \geqq 0 \quad x_2 \geqq 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

という条件で　$z = 6x_1 + 21x_2 =$ 最小量

なる簡単な場合であった。それはつけたりの関係の中の "$\geqq$" の代りに不等式 "$\leqq$" を有する、例えば(1)の中のすべての定数係数の符号をすっかりかえる事によって最大の問題として書くことができた。しかしながら、対応する最小と最大の問題の間にはもっと有用なきずながある。重要な双対律がその問題の形式代数学の中にも経済学的解釈の中にも存在する。多くの経済学の問題は最小の形態として及び最大の形態に扮して対等のやり方で登場する。例えば、生産に関しては限られた資金が一商品の生産に振当てられる時は、与えられた生産高が最小の費用で生産されようと最大の生産高が与えられた費用で生産されようとそれは問題でない、それだからそれぞれの場合に同一の費用函数が生じる。

形式代数学によって、最小量として表わされる例えば(1)のようなどんな線型計画でも最大量に関する双対問題を件なう。これは全く経済学的解釈と別で、そしてそれはあるいはまっすぐに行くであろうが他方に対してはあるいは不自然であるであろう。栄養物問題の特殊な場合(1)に於てその双対問題は次のように得られる。1日に付き3,000カロリーとたん白質の100グラムを含んでいる食物がパンとチーズを買うことによって得られねばならぬ。以前のように構成単位(1,000カロリー、たん白質25グラム)を採用し、かつ ξ_1 と ξ_2 は二つの栄養分の一単位につきペニーでの支出であると仮定せよ。その食物に関する総支出は $\zeta = 3\xi_1 + 4\xi_2$ であり、そしてこれが与えられた内容で「最も気まぐれの」"fanciest" 食物を用意しようとして最大限度に達しさせられね

ばならぬ。その規準は食物の望ましさのインディケータのように、その価格を伴なう。パンとチーズの価格と栄養分の含有量は I、の中のように与えられる。ζを最大限度に達しさせることに関しては二つの制限がある、そして各食物に1ポンドにつき使われる額は市場価格を超える事はできない。1ポンドにつき1,000カロリーとたん白質25グラムを有するパンについては1ポンドにつきその支出は1ポンドについて6ペニーを超えることの出来ない $\xi_1+\xi_2$ である。同様に、チーズについても支出は1ポンドにつき $2\xi_1+4\xi_2\leqq 21$ ペニーである。それでその問題は次のように言い表わすことができる、すなわち

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1+\xi_2\leqq 6 \\ 2\xi_1+4\xi_2\leqq 21 \\ \xi_1\geqq 0 \quad \xi_2\geqq 0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

を条件として $\zeta=3\xi_1+4\xi_2=$最大量

とするような支出 ξ_1と ξ_2とを見出すこと。

栄養問題は双対形式をもっている。それらの間の関係は単一でもあり容易にあらゆる種類の線型計画に一般化されもする。(1)では、z は最小量でかつつけたりの関係は"$\geqq$"であり、そして(2)では、ζは最大量でかつつけたりの関係は"$\leqq$"である。二つながら技術的な係数（食物の栄養分の含有量）の行列 $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ を含んでいるが、(2)に関してはそれは(1)に比較すればつけたりの関係に置き換えられる。(1)において、価格(6,21)は最小にされる函数の中にかつ要件(3，4)はつけたりの関係の中に現われる。そして(2)においては、それらは反対の場所に現われる。両方の問題には一つの経済学的解釈があるが、それは(2)よりも(1)において一層多くの意味をもつことがある。

双対問題は（1）の最小の z が（2）の最大の ζ に均等である意味で同一な解答をもつことを示すことが残してある。（1）の解答は次のようである。

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 2\frac{1}{2} \qquad z = 22\frac{1}{2}$$ （食物の最小費用）

（2）の解答は同筆法で、右におけるような図式を用いて得ることができて、それは次の如きものである事が見つけ出される

$$\xi_1 = \frac{3}{2} \qquad \xi_2 = \frac{9}{2} \qquad \zeta = 22\frac{1}{2}$$ （食物の最大支出）

同様の結果—1日につき $22\frac{1}{2}$ ペニーの支出—はパンの2ポンドとチーズの $\frac{1}{2}$ ポンドという最適の買入れによっても、1,000カロリーにつき $1\frac{1}{2}$ ペニーとたん白質25グラムにつき $4\frac{1}{2}$ ペニーという最適の支出によっても得られる。

三、一般的な線型計画とその双対

二つの栄養分と二つの食物の栄養問題は右のように線型計画法の問題の広い区域のわかり易い実例であり好標本でもある。その問題そのものは容易に m 個の栄養分と n 個の食物の場合に一般化されてこれが各種の経済学的及びその他の解釈の線型計画の有効範囲に対して一般的な形になっている。

一般的な線型計画法の問題とその双対は次のようである。

（i）
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n \geqq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n \geqq b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1}x+a_{m2}x_2+\cdots\cdots\cdots+a_{mn}x_n\geqq b_m$$

$$x_1\geqq 0\quad x_2\geqq 0\ \cdots\cdots\ x_n\geqq 0$$

という条件で　$z=p_1x_1+p_2x_2+\cdots\cdots+p_nx_n=$最小量

(ii)　$a_{11}\xi_1+a_{21}\xi_2+\cdots\cdots+a_{m1}\xi_m\leqq p_1$

$$a_{12}\xi_1+a_{22}\xi_2+\cdots\cdots+a_{m2}\xi_m\leqq p_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{1n}\xi_1+a_{2n}\xi_2+\cdots\cdots+a_{mn}\xi_m\leqq p_n$$

$$\xi_1\geqq 0\ \ \xi_2\geqq 0\cdots\cdots\xi_m\geqq 0$$

という条件で　$\zeta=b_1\xi_1+b_2\xi_2+\cdots\cdots+b_m\xi_m=$最大量

この栄養の問題は単に一つの応用又は実例にすぎない、そしてこれらの a はその時 m 種の栄養分と n 種の食物との間の技術上の関係であり、これらの b は m 種の栄養的な要件であり、これらの p は n 種の食物価格であり、これらの x は変数である購入でありかつ z は出来るだけ小さくされる費用である。別の問題では、これらの定数と変数にはその他の解釈がある。

　線型計画の陳述は行列代数によって次のようにより簡潔になる、

	$\mathbf{Ax}\geqq\mathbf{b}$		$\mathbf{A}'\xi\leqq\mathbf{p}$
と	$\mathbf{x}\geqq\mathbf{o}$	と	$\xi\geqq\mathbf{o}$

という条件で $z=\mathbf{p}'\mathbf{x}=$最小量　という条件で $\zeta=\mathbf{b}'\xi=$ 最大量　この公式化で、与えられた元は次のようである。

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{A}=[a_{rs}] & m\times n\ \text{次の技術的な係数の行列} \\ \mathbf{B}=\{b_r\} & m\ \text{次のベクトル} \\ \mathbf{P}=\{p_s\} & n\ \text{次のベクトル} \end{array}\right\} \quad \begin{pmatrix} r=1,2\ \cdots\cdots,m \\ s=1,2\ \cdots\cdots,n \end{pmatrix}$$

これらの変換は$\mathbf{A}'$, $\mathbf{b}'$ 及び $\mathbf{p}'$ である。

その問題か又はそれの双対が選ばれるかでその解答が n 次のベクトル $\mathbf{x}$ であるか、m 次のベクトル $\mathbf{n}$ である。もっともらしい解答はそれらの不等式を満足させる、そして最適でもっともらしい解答もやはり最大の（又は最小の）条件を満足させる。栄養問題における特別の応用では、解答は食物の費用を極小にする買入のベクトル $\mathbf{x}$ か、それともその食物に対する支出を最大限度に達しさせる一栄養分につき支出のベクトル $\mathbf{n}$ である。

簡単な実例の分析にてらしてみれば、その問題とそれの双対は同一解答をもつこと、即ち、最小の z と最大の h は同一の事柄であるという事を期待することはもっともなことである。どんな解答の起りうべきことも除外されない場合には、これは実にその通りである。その基本的な結果、すなわちその**双對定理** *Duality Theorem* は次のようである、

線型計画とその双對は共有解をもつかどんな解ももたないかどちらかである。

The linear programme and its dual have either a common solution or no solution at all.

形式証明は決して容易ではない、一つの証明法は Koopmans 氏（1951年）の著書の中の ChapterXIX に Gale, Kuhn 及び Tucker の三氏によって与えられている[2]、そしてこの証明はゲームの理論に関連して詳しく説かれかつそれはこゝで考究される問題よりもさらに一層広範囲にわたる線型計画法の問題によって仕組まれている。もう一つの

(2) Koopmans (T.C.) (編集者)(1951) :*Activity Analysis of Production and Allocation* (Wiley, 1951)

証明は Charnes, Cooper 及び Henderson の三氏（1953年）の著書の中の Lecture Ⅷ で Charnes 氏によって与えられており[3]、そして Orden や Dantzig の両氏によるより初期の著作に基ずくその証明は線型計画の解に於いて単体方法を用いている[4]。

(3) Charnes (A.) (1952) : "Optimality and Degeneracy in Linear Programming", *Econometrica*, **20**, 160—170.
(4) Dantzig (G.B.) (1949) : "The Programming of Interdependent Activities:Mathematical Model", *Econometrica*, **23**, 200—11.